

MILIEUX MAGNETIQUES

TD série 2

responsable Mr Zoheir

Problème 1 : Examen 2014. Faire la différence de notation de $\vec{m}$ (minuscule) et $\vec{M}$ (majuscule)

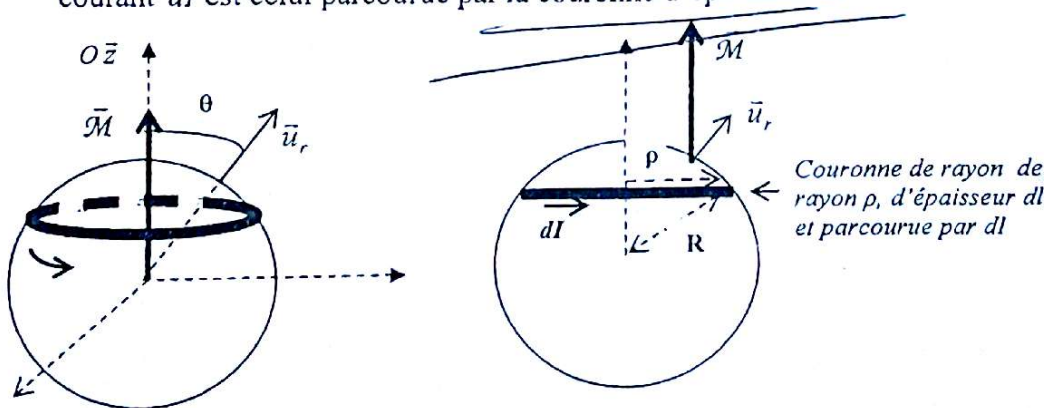
Une petite sphère homogène en acier, de centre O, de rayon R est placée dans le vide. Cette sphère possède un moment magnétique $\vec{m}$ constant et est caractérisée par le vecteur aimantation $\vec{M} = M\vec{e}_z$.

On repérera la position d'un point P de l'espace par $r=OP$ et $\theta = (\vec{M}, \vec{r})$. On donne $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$

1) A l'extérieure de la sphère

En utilisant directement les formules usuelles du potentiel $\vec{A}$ et le champ $\vec{B}$ d'un dipôle magnétique déterminer, en tout point extérieur éloigné de la sphère en fonction de $\vec{M}$, le potentiel vecteur $\vec{A}$, puis les composantes de B_r et B_θ tel que $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta$

- 2) A l'intérieure de la sphère : On admettra que ce milieu aimanté produit le même champ que si la sphère était creuse et parcourue par un courant de densité surfacique $\vec{j}_s = \vec{M} \wedge \vec{u}_r$, en chaque point P, où $\vec{u}_r$ désigne le vecteur unitaire radial. Le champ $\vec{B}$ est supposé uniforme. On donne le champ créé par une spire de rayon ρ parcourue par un courant dI en son axe $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\rho} dI \sin^3 \theta \vec{u}_z$, le courant dI est celui parcourue par la couronne d'épaisseur dl



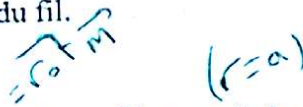
Sphère Aimantée

- Exprimer dI en fonction de $\vec{j}_s$ et R et $d\theta$
 - Déterminer en fonction de $\vec{M}$, le champ $\vec{B}_0$ au centre de la sphère, qui est aussi le champ en tout point à l'intérieur de la sphère.
 - Exprimer ce champ $\vec{B}_{ext} = \vec{B}_0$ dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ où $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$
- 3) Vérifier la continuité des composantes normales et la discontinuité des composantes tangentielles à partir des relations de passage du milieu 1 interne vers le milieu 2 externes. On donne
- $$\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

Problème 2

Un fil rectiligne, très long, conducteur, de rayon a et de susceptibilité magnétique χ_m , est parcouru par un courant volumique uniforme d'intensité totale I .

1. a) Donner l'expression de la densité volumique de courant $\vec{J}$ à une distance $r=OP > a$ l'extérieur
- b) établir les expressions des champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$ à une distance $r=OP > a$ à l'extérieur du fil. On utilisera pour cela le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon r .
2. a) Donner l'expression de la densité du courant $\vec{J}$ à une distance $r=OP < a$ l'intérieur du fil.
- b) En déduire l'expression des champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$ à l'intérieur du fil.
- c) Donner l'expression de l'aimantation $\vec{M}$
3. En déduire les expressions de densités d'aimantations volumique $\vec{J}^*$ et surfacique $\vec{J}_s^*$.



Problème 3 :

- 1) a) Soient deux milieux aimantés notés 1 et 2. On note $\vec{J}_u$, $\vec{J}_{sm1}$ et $\vec{J}_{sm2}$ les densités surfaciques respectives de conduction et d'aimantation dans ces deux milieux, $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire à la surface allant de 1 vers 2. Ecrire les relation de passage des composantes tangentielles des excitations $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$ entre les milieux 1 et 2.

b) Réécrire la même relation pour les composantes tangentielles des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$

- 2) Un très long barreau cylindrique d'axe Oz de rayon R possède une aimantation:

$$\vec{M} = kr^2 \vec{e}_\theta \quad \text{où } r \text{ la distance du point à l'axe et } k \text{ étant une constante}$$

- a) Déterminer les densités de courant surfaciques $\vec{J}_u$ et volumiques d'aimantation $\vec{J}_v$
- b) Etablir le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace
- c) Vérifier la relation de passage à travers la surface en fonction de $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$
- d) Déterminer les champs d'excitation en tout point de l'espace.

Problème 4

1/ Sachant que les susceptibilités magnétiques χ_m et χ_m^* peuvent être respectivement définies

$$\text{selon : } \vec{M} = \chi_m \vec{H} \text{ (eq.1) et } \vec{M} = \chi_m^* \frac{\vec{B}}{\mu_0} \text{ (eq.2)}$$

L'équation 1 est celle vue en cours. Nous adoptons ici l'équation 2.

Etablir la relation donnant χ_m^* (eq. 2) en fonction, **uniquement**, de la perméabilité relative μ_r .

2/ L'espace délimité par un solénoïde torique, à section carrée, est rempli d'un milieu magnétique de susceptibilité magnétique χ_m^* et de perméabilité magnétique relative μ_r .

Le rayon moyen du solénoïde est R et le côté de la section carrée a.

2.a) Trouver l'expression du champ $\vec{H}$ en fonction de la distance r à l'axe du tore lorsque les N spires du solénoïde sont parcourues par un courant d'intensité I.

2.b) Donner l'expression de $\vec{B}$.

2.c) En déduire l'expression de $\vec{M}$

2.d) Calculer l'énergie magnétique ϵ_m stockée par un tel solénoïde.

2.e) Montrer que l'expression trouvée de l'énergie se met sous la forme : $\epsilon_m = \frac{1}{2} \mu_r L_0 I^2$

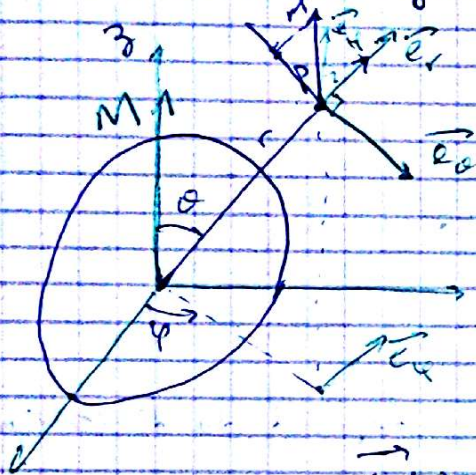
2.f) Que représente la quantité L_0 ? Donner son expression

Série 2 : Milieux Magnétiques

Problème 1:

1/- A l'extérieure:

Expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ et composante du champ magnétique. $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$



$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{avec } \vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M} \quad \left(\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \right)$$

$$\vec{M} = M \cos \theta \vec{e}_r - M \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{avec } \vec{M} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} M \cos \theta \\ -M \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +r M \sin \theta \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{M \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\phi$$

$$\text{On a, } \vec{B}(P) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

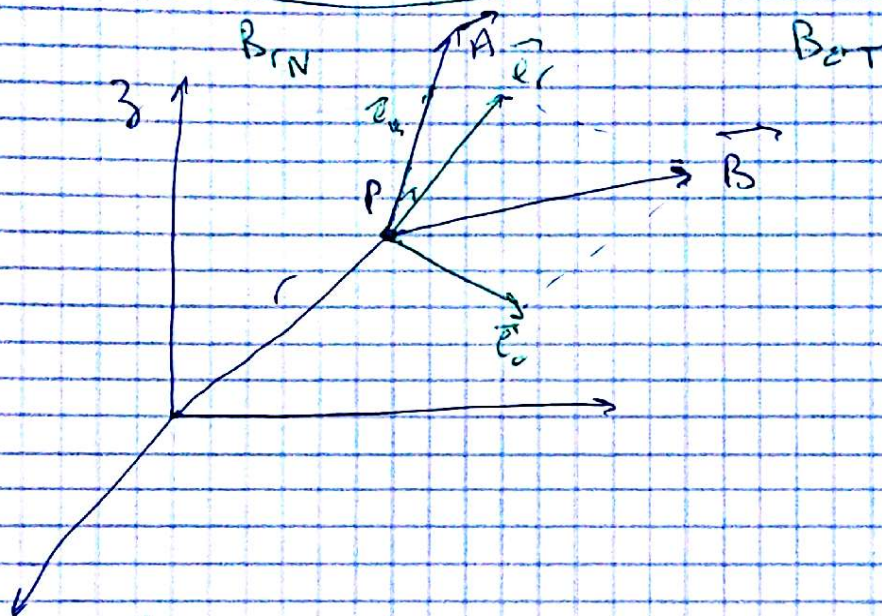
$$= - \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) \text{grad} \left(\frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)$$

$$= - \frac{\mu_0 R^3}{3} \text{grad} \left(\frac{M \cos \theta \cdot r}{r^2} \right)$$

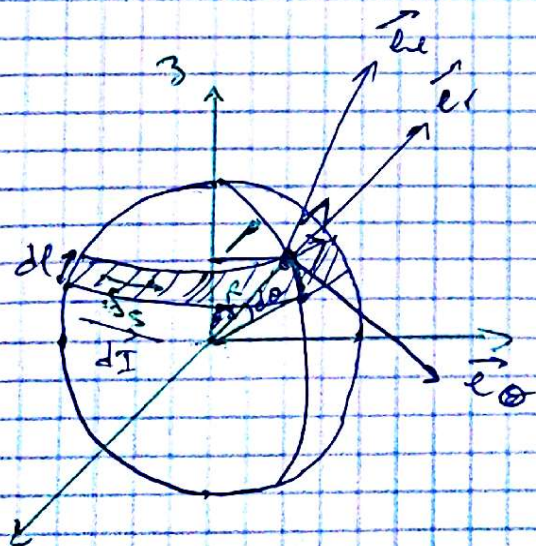
$$= - \frac{M_0 R^3}{3} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M \cos \theta}{r^2} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M \cos \theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta \right)$$

$$= - \frac{M_0 R^3}{3} \left[- 2 \frac{M \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r - \frac{M \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right]$$

$$= \underbrace{\frac{2 M_0 M \cos \theta}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \vec{e}_r}_{B_{rN}} + \underbrace{\frac{M_0 M \sin \theta}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \vec{e}_\theta}_{B_{\theta T}}$$



2/ - A l'intérieure:



a). Expression d'I:

Expression et sens du $\vec{S}_g$: $\boxed{\vec{S}_g = M \sin \theta \vec{e}_\theta}$

on a :

$$\vec{S}_g = \vec{M} \wedge \vec{e}_r = \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = M \sin \theta$$

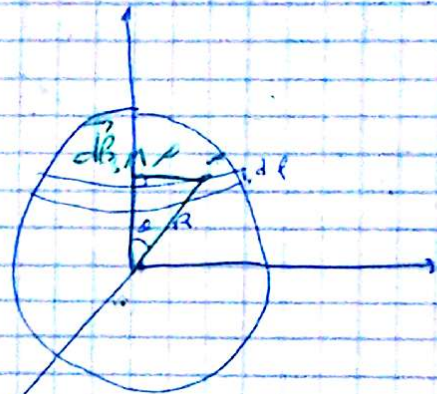
On a: $dI = \gamma_s \cdot dl$
 avec $dl = R \cdot d\alpha$ } $\Rightarrow dI = \gamma_s R d\alpha$
 $= M \sin\theta R d\alpha$

b/ Expression du champ $\vec{B}_0$

On a: $d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\beta} dI \sin^3\theta \vec{e}_3$

avec $\beta = R \sin\theta$

$dI = \gamma_s R d\alpha$
 $= M \sin\theta R d\alpha$



$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2 R \sin\theta} M \sin\theta R \sin^3\theta d\alpha \vec{e}_3$

$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3\theta d\alpha \vec{e}_3$

$\Rightarrow \vec{B}_0 = \int_{\text{surface plane}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\alpha \vec{e}_3$

$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 M}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) (d\cos\theta) d\alpha \vec{e}_3$

$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 M}{2} \left(\cos\theta \Big|_0^\pi - \frac{1}{3} \cos^3\theta \Big|_0^\pi \right) \vec{e}_3$

$= -\frac{\mu_0 M}{2} \left(-1 - 1 - \frac{1}{3} [-1 - 1] \right)$

$\vec{B}_0 = \frac{2}{3} \mu_0 M \vec{e}_3$

c) - Expression de $\vec{B}_0 = B_{ext} = B_{0N} \vec{e}_r + B_{0T} \vec{e}_\theta$

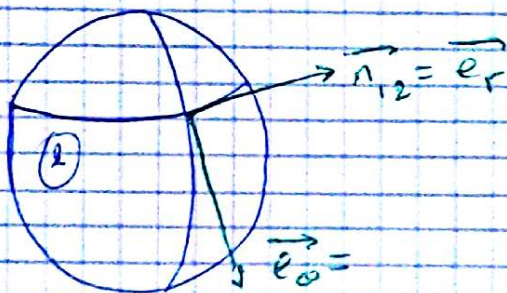
$$\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \underbrace{\frac{2}{3} \mu_0 M \cos\theta \vec{e}_r}_{B_{0N}} - \underbrace{\frac{2}{3} \mu_0 M \sin\theta \vec{e}_\theta}_{B_{0T}} \quad (3)$$

3) - Vérification de la continuité de la composante normale et la discontinuité des composantes tangi

d'après la relation de passage

$$\vec{B}_2(r=R) - \vec{B}_0(r=R) = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12} \quad (1)$$



milieu ①

On a

$$\vec{B}_2(r=R) = \underbrace{\frac{2}{3} \mu_0 M \left(\frac{R}{R}\right)^3 \cos\theta \vec{e}_r}_{B_{2N}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{3} M \sin\theta \vec{e}_\theta}_{B_{2T}} \quad (2)$$

a partir de (1), on déduit :

$$\vec{B}_2(r=R) - \vec{B}_0(r=R) = (B_{2N} - B_{0N}) \vec{e}_r + (B_{2T} - B_{0T}) \vec{e}_\theta$$

$$\mu_0 \vec{J}_s(r=R) \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ M \sin\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu_0 \begin{vmatrix} 0 \\ M \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mu_0 M \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (4)$$

$$(B_{2N} - B_{0N}) \vec{e}_r = (B_{2T} - B_{0T}) \vec{e}_\theta = \mu_0 M \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow B_{2N} - B_{0N} = 0 \Rightarrow B_{2N} = B_{0N} \quad \text{d'après équations 2 et 3, c'est vérifié}$$

c) - Expression de $\vec{B}_0 = B_{ext} = B_{0N} \vec{e}_r + B_{0T} \vec{e}_\theta$

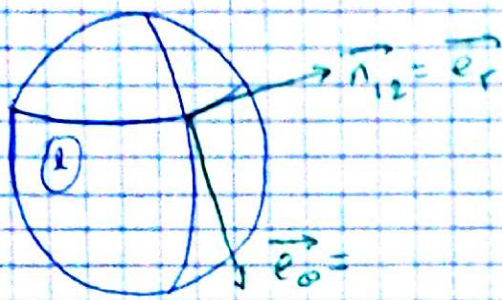
$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \underbrace{\frac{2}{3} \mu_0 M \cos \theta \vec{e}_r}_{B_{0N}} - \underbrace{\frac{2}{3} \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_\theta}_{B_{0T}} \quad (3)$$

3) - Vérification de la continuité de la composante normale et la discontinuité des composantes tangentes:

d'après la relation de passage

$$\vec{B}_2(r=R) - \vec{B}_0(r=R) = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12} \quad (1)$$



milieu ①

On a B_{2N} B_{2T}

$$\vec{B}_2(r=R) = \frac{2}{3} M \mu_0 \left(\frac{R}{R}\right)^3 \cos \theta \vec{e}_r + \frac{M}{3} \mu_0 \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (2)$$

à partir de (1), on déduit:

$$\vec{B}_2(r=R) - \vec{B}_0(r=R) = (B_{2N} - B_{0N}) \vec{e}_r + (B_{2T} - B_{0T}) \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{J}_s(r=R) \wedge \vec{n}_{12} &= \mu_0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ M \sin \theta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu_0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ M \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (4) \end{aligned}$$

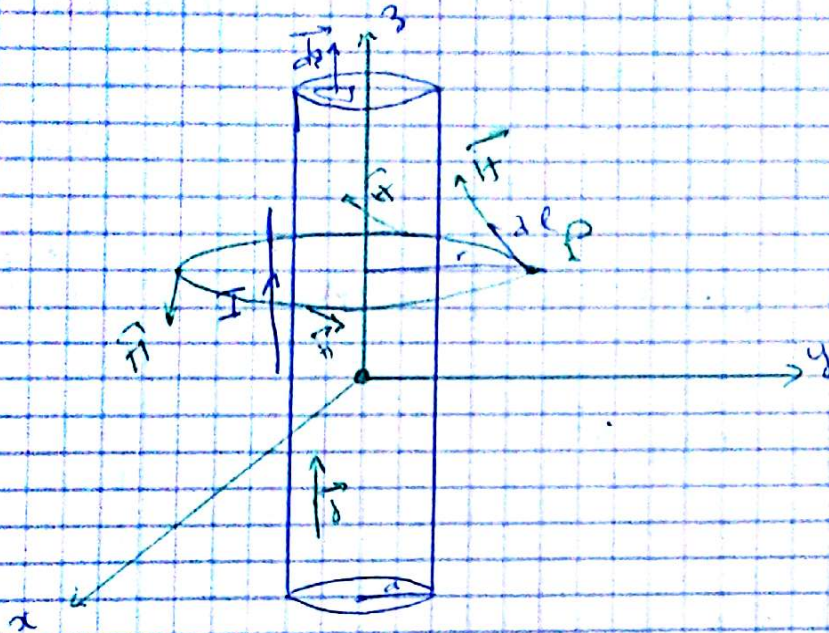
$$(B_{2N} - B_{0N}) \vec{e}_r = (B_{2T} - B_{0T}) \vec{e}_\theta = \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow B_{2N} - B_{0N} = 0 \Rightarrow B_{2N} = B_{0N} \quad \text{d'après équations 2 et 3, c'est vérifié}$$

$$\Rightarrow B_{2T} - B_{0T} = \frac{M}{3} M_0 \sin \theta + \frac{2}{3} M_0 M \sin \theta = M_0 M \sin \theta$$

En composant avec (4) on déduit la discontinuité des composantes tangentielles.

Problème 2:



1. a/ Expression de la densité $\vec{j}$ en fonction de I

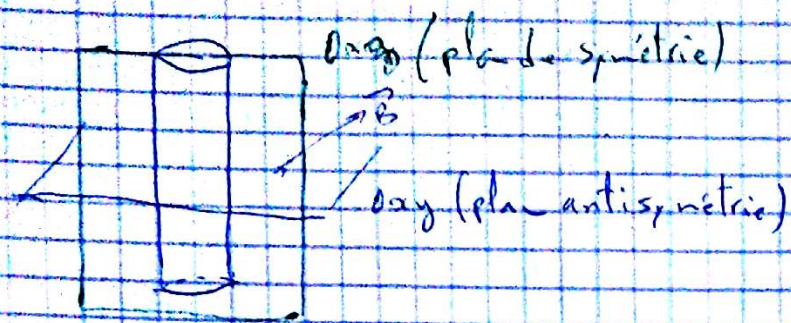
$$I = \iint_{\text{Disque, cl}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \overset{\text{uniforme}}{\iint} j \, dS = j \iint dS = j \pi a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{j = \frac{I}{\pi a^2}}$$

b/ Expression de $\vec{H}$ et $\vec{B}$, lorsque $(r \neq a)$

→ Variable et sens du $\vec{H}$ et $\vec{B}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{fil}(\infty) \rightarrow \text{trans} \\ \text{cylind} \rightarrow \text{Rot} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{H}(r, \theta, z) = \vec{H}(r)$$



$$\Rightarrow \vec{H}(r) = H_r \vec{e}_r$$

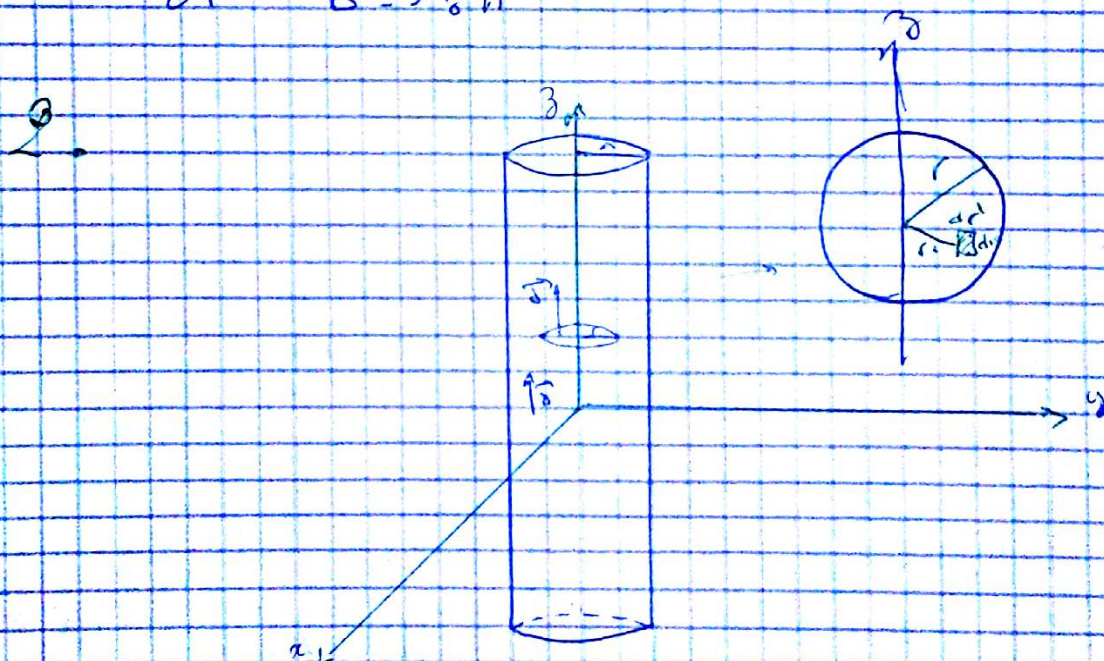
Oxy: $\int_{\text{cercle } r} \vec{H} d\vec{\ell} = \Sigma \text{ courant traversant le cercle } r$

$$\Rightarrow \int_{\text{cercle } r} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_{\text{cercle } r} H d\ell = H \cdot 2\pi r$$

$$\Sigma \text{ courant} = I \Rightarrow H 2\pi r = I$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$



a) - Expression de j à l'intérieur du fil: ($r < a$)
(une autre forme):

$$dI = j dS = j r' dr' d\theta$$

$$\Rightarrow I = \iint j r' dr' d\theta = j \int_0^r \int_0^{2\pi} r' dr' d\theta$$

$$= j \pi r^2$$

$$j = \frac{I'}{\pi r^2}$$

b/. Expression de $\vec{H}$, $\vec{B}$:

Après inv. : On a $\int_{\text{cercle, } r} \vec{H} d\vec{l} = \sum \text{courant travers le cercle, } r$

$$\Rightarrow \int_{\text{cercle, } r} \vec{H} d\vec{l} = \int_{\text{cercle, } r} H dl = H \int dl = H 2\pi r$$

$$\sum \text{courant} = I' \Rightarrow H 2\pi r = I'$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I'}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{j \pi r^2}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{H} = \left(\frac{I}{\pi a^2} \right) \frac{\pi r}{2\pi} \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi a^2} r \vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}}$$

c). L'expression de l'aimantation $\vec{M}$:

$$\text{On a } \vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} = \frac{\chi_m I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$$

3/. L'expression de $\vec{J}_v$, $\vec{J}_s$

$$\text{On a ; } \vec{J}_v = \text{rot } \vec{M} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r M_\theta] \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\chi_m I r}{2\pi a^2} \right] \vec{e}_z = \frac{\chi_m I}{r 2\pi a^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{J}_v = \frac{\chi_m I}{\pi a^2} \vec{e}_z}$$

$$\text{On a } \vec{J}_s(r=a) = \vec{M}(r=a) \wedge \vec{e}_r$$

$$\text{avec ; } \vec{M}(r=a) = \frac{\chi_m I a}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta = \frac{\chi_m I}{2\pi a} \vec{e}_\theta$$

Donc

$$\boxed{\vec{J}_s = -\chi_n \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_z}$$

Problème 3 :

1/

a/

à la surface entre les milieux ① et ②

$$\text{On a } \begin{cases} \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{J}_{sc} \wedge \vec{n}_{12} \\ \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{sc} \end{cases}$$

b/

$$\text{On a, } \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{sc}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{M}_1$$

$$\begin{cases} \vec{M}_1 \wedge \vec{n}_{12} = \vec{J}_{sm1} \\ \vec{M}_2 \wedge \vec{n}_{21} = \vec{J}_{sm2} \end{cases}$$

A partir de ces équations, on déduit :

$$\vec{n}_{12} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2 - \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} + \vec{M}_1 \right) = \vec{J}_{sc}$$

$$-\vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_2 + \vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_1 + \vec{n}_{12} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \right) = \vec{J}_{sc}$$

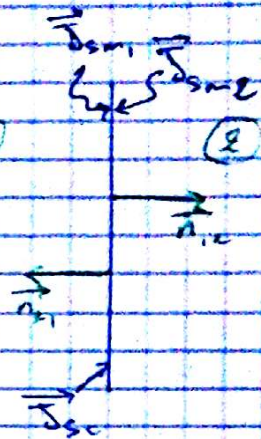
Aussi ;

$$-\vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_2 = \vec{M}_2 \wedge \vec{n}_{12} = -\vec{M}_2 \wedge \vec{n}_{21} = -\vec{J}_{sm1}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge \vec{M}_1 = -\vec{M}_1 \wedge \vec{n}_{12} = -\vec{J}_{sm2}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \right) = \vec{J}_{sc} + \vec{J}_{sm1} + \vec{J}_{sm2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 (\vec{J}_{sc} + \vec{J}_{sm1} + \vec{J}_{sm2}) \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{J}_{sc} + \vec{J}_{sm1} + \vec{J}_{sm2}) \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$



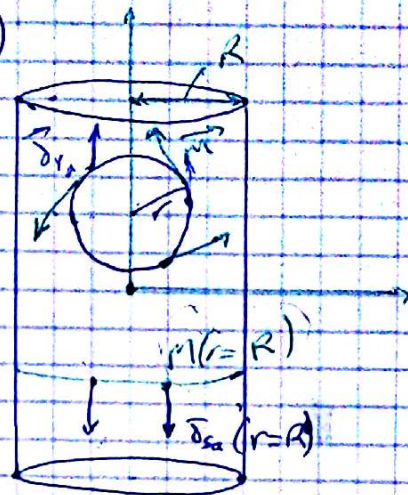
2/

a/- Expression de $\vec{J}_s(r=R)$ et $\vec{J}_v(r)$

On a:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{sa}(r=R) &= \vec{M}(r=R) \wedge \vec{n}_{1,2} \\ &= \vec{M}(r=R) \wedge \vec{e}_r \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ KR & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{J}_{sa}(r=R) = -KR^2 \vec{e}_z}$$



$$\begin{aligned} \vec{J}_v(r) &= \text{rot } \vec{M}(r) = 0\vec{e}_r + 0\vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k r^2) \vec{e}_z \\ &= \frac{3k}{r} r^2 \vec{e}_z = 3kr \vec{e}_z \end{aligned}$$

b/- Expression du champ $\vec{B}$: A l'interieur: $r < R$

D'après le problème 2 nous avons montré & montré:

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

Pour déterminer $\vec{B}$, on utilise:

$$\int_{\text{cercle, } r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum \text{courant circulant à travers le rayon } (r) \quad \text{une section}$$

$$\rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B dl = B \cdot 2\pi r$$

$$\rightarrow \int_0^r \text{courant} = \int_0^r \vec{J}_v(r') \cdot d\vec{S}$$

section de rayon r

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} 3kr' \cdot r' dr' d\theta = \int_0^r 3kr' r' dr' \cdot 2\pi$$

$$M_0 \Sigma_{\text{courant}} = \frac{\mu_0 6\pi k r^3}{3} = \mu_0 2\pi k r^3$$

$$B 2\pi r = \mu_0 2\pi k r^3 \quad \boxed{B = \mu_0 k r \vec{e}_\phi}$$

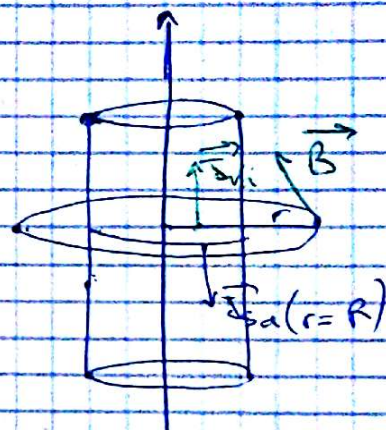
• A l'extérieur $r > R$:

On a:

$$\int \vec{B} d\vec{l} = M_0 \Sigma_{\text{courants traversant la section de rayon } r}$$

$$\rightarrow \int \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi r$$

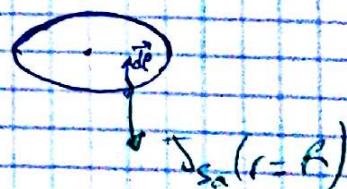
$$\Sigma_{\text{courant}} = \frac{I_v}{r} + I_s$$



$$\frac{I_v}{r} = \int \vec{J}_{va}(r) \cdot d\vec{\xi} = \int_0^{2\pi} \int_0^R 3kr \, r \, dr \, d\theta$$

$$I_v = 2\pi k R^3 \quad \text{ou} \quad \frac{I_v}{r} =$$

$$I_s = \int \vec{J}_{sa}(r=R) d\vec{l}' = \int_{\text{cercle de rayon } R} (-kR') d\vec{l}'$$



$$= -kR' 2\pi R = -2\pi k R^3$$

Donc;

$$B 2\pi r = \mu_0 [2\pi k R^3 - 2\pi k R^3] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$$

c/ Vérification de la relation de passage ($r=R$) pour les composantes tangentielles des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$.
On a, lorsque $r=R$:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_{sm}(r=R) \wedge \vec{n}_{12}$$

• D'après la question b) On déduit:

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(r=R) - \vec{B}_1(r=R) &= 0 - \mu_0 k R^2 \vec{e}_3 \\ &= -\mu_0 k R^2 \vec{e}_3 \quad (2) \end{aligned}$$

• D'après la question a) on déduit:

$$\vec{J}_{sm}(r=R) = -k R \vec{e}_3$$

Donc

$$\mu_0 \vec{J}_{sm}(r=R) \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ kR & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 k R^2 \vec{e}_3 \quad (3)$$

Conclusion:

Puisque les expressions (2) et (3) sont égales alors la relation de passage demander et vérifier

d. Expressions des $\vec{H}_2$ et $\vec{H}_1$.

A l'intérieur $r < R$:

$$\begin{aligned} \text{On a; } \vec{H}_1 &= \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{M}_1 \\ &= \frac{\mu_0 k r^2 \vec{e}_3}{\mu_0} - k r^2 \vec{e}_3 = \vec{0} \end{aligned}$$

A l'extérieur:

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2 = \frac{0}{\mu_0} - 0 = \vec{0}$$

1 - Expression de χ_m^* en fonction $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$

On a $\boxed{\vec{M} = \chi_m^* \frac{\vec{B}}{\mu_0}}$ eq (2)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \vec{B}$$

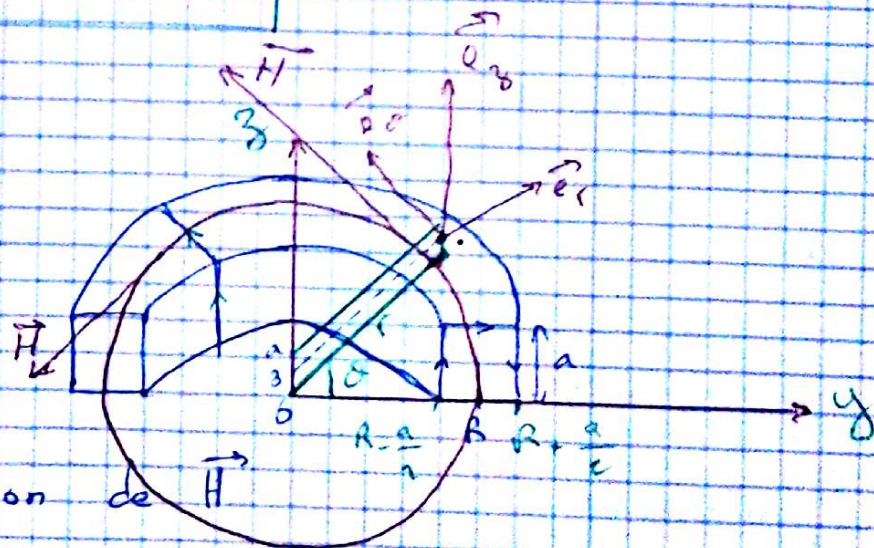
Donc, en comparant avec l'équation 2, on déduit

$$\frac{\chi_m^*}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \Rightarrow \chi_m^* = 1 - \frac{\mu_0}{\mu}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{\mu}{\mu_0}} = 1 - \frac{1}{\mu_r} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r}$$

$$\boxed{\chi_m^* = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r}}$$

2/-



a/- Expression de $\vec{H}$

• La forme du solénoïde nous permet de travailler en coordonnées cylindre ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$)

• Par raisons de symétrie, de $\vec{B}$ est tangentiel et dépend que de r :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{H} = H(r) \vec{e}_\theta$$

D'après le Th. d'Ampère, on peut écrire :

$$\int_{\text{cercle } r} \vec{H} d\vec{l} = \sum \text{courant circulant à travers la section de rayon } r$$

* A l'intérieur $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$:

$$\rightarrow \int \vec{H} d\vec{l} = \int H(r) \vec{e}_\phi d\vec{e}_\phi = H(r) 2\pi r$$

$$\rightarrow \sum \text{Courant} = NI$$

$$H(r) 2\pi r = NI \rightarrow$$

$$\vec{H}(r) = \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

* A l'extérieur ($r > R + \frac{a}{2}$) :

$$\int \vec{H} d\vec{l} = \sum \text{courant circulant à travers la section } r$$

$$\rightarrow \int \vec{H} d\vec{l} = H(r) 2\pi r$$

$$\rightarrow \sum \text{courant} : NI - NI = 0$$

} $\Rightarrow$

$$\vec{H} = \vec{0}$$

* $r < R - \frac{a}{2} : \sum \text{courant} = 0 \Rightarrow$

$$\vec{H} = \vec{0}$$

b - l'expression de $\vec{B}$:

A l'intérieur :

$$\text{on a } \vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{\mu NI}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

A l'extérieur :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{0} = \vec{0}$$

c - l'expression de M :

On a, $\vec{M} = \chi_m^* \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \chi_m \frac{\mu_0 N I}{\mu_0 L} \vec{e}_z$

$$\vec{M} = \chi_m^* \mu_r \frac{N I}{L} \vec{e}_z$$

d) Calcule d'énergie magnétique E_m stockée par un tel solénoïde.

$$E_m = \frac{1}{2} \int \frac{B^2}{\mu} dz$$

Volume du solénoïde

$$E_m = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu N I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\theta dz = \frac{\mu (N I)^2}{8\pi} \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{dr}{r}$$

$$E_m = \frac{\mu (N I)^2 a}{4\pi} \ln \left(\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right) \quad (1)$$

e) Montrons que $E_m = \frac{1}{2} \mu_r L_0 I^2$

$$(1) \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} I^2 \left(\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right) \right)$$

$$L_0 = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right)$$

L_0 = l'inductance propre sans milieu magnétique

Si on remplace le milieu magnétique par le vide,

On déduit : $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} L_0 I^2$

TD n 3

ELECTROMAGNETISME DES MILIEUX

responsable Mr Zoheir

Exercices

1) Ecrire les équations de Maxwell dans le cas

- a) le plus général
- b) d'un milieu LHI aimanté (μ) diélectrique (ϵ) et conducteur (σ)
- c) d'un milieu isolant parfait ; d'un conducteur parfait
- d) d'une onde Plane dans le vide loin des sources

2) Ecrire le champ électrique dans le cas d'une onde Plane (loin des sources)
Monochromatique harmonique de direction $z > 0$ polarisée suivant x

En déduire l'équation d'Onde dite d'Alembert.

Problème Guide d'Ondes

On considère le champ de vecteur dans le vide : (a constante réelle > 0)

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)} \quad E_z = \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

1. De quel type d'onde s'agit-il ? A quelle condition sur α peut-il être le champ électrique d'une O.E.M ? On utilisera une équation de Maxwell pour répondre à cette question et cette condition sera conservée dans toute la suite du problème. Peut-on définir sa polarisation ?
2. Déterminer la relation de dispersion $k=f(\omega)$.

Série N°: 3

* Exercice I:

a) - • $\text{div } \vec{D} = \rho_c$ • $\text{div } \vec{B} = 0$
 • $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ • $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

b) - un milieu LHI, aimante (μ), diélectrique (ϵ) et conducteur.

Dans ce cas μ , ϵ sont constantes.

• $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$; $\vec{j}_c = \sigma \cdot \vec{E}$
 • $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho_c$ • $\text{div } \vec{B} = 0$
 • $\text{rot} \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H})$ • $\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E})$

c) - Cas d'un milieu diélectrique parfait

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, $\rho_c = 0$, $\vec{j}_c = 0$

$\Rightarrow$ • $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0$ • $\text{div } \vec{B} = 0$
 • $\text{rot} \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H})$ • $\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E})$

* Cas d'un conducteur

une OEFM ne se propage pas dans un conducteur
 ($\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$).

d) - Onde Plane dans le vide loin des sources:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad \vec{J} = \vec{0}, \quad \vec{\rho} = \vec{0}$$

$$\bullet \operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = 0$$

$$\bullet \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\bullet \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \epsilon_0 \end{pmatrix} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \mu_0)$$

$$\bullet \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \mu_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E})$$

* L'équation d'onde dite d'Alembert:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{1}{0} \left(\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \right) \quad \Delta \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \rightarrow \text{Polarisation}$$

$\uparrow$ Harmonique $\uparrow$ Planes Sens Positif

Problème: onde guidée (Guided wave)

c'est une onde Propage dans un espace (Milieu) bien définie (délimitée)

(Guidée)

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)} \\ E_z = \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

4

1^o / il me s'agit pas d'une onde plane: amplitude dépend de y . c'est une onde progressive dans le sens positif.

déterminer α :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \text{ (vide)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\pi}{a} \epsilon_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - kz))$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -j k \alpha \epsilon_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - kz))$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{j\pi a}{k} \quad j = \exp(j\pi/2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi a}{k} = j\pi/2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_y = \epsilon_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - kz)) \\ E_z = \epsilon_0 \frac{\pi}{k} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})) \end{cases}$$

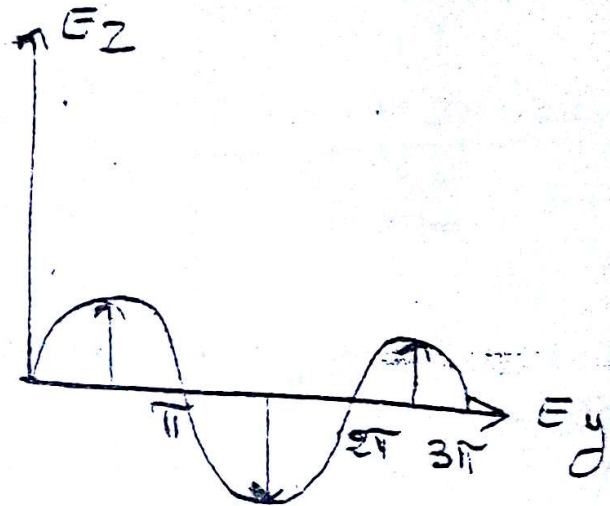
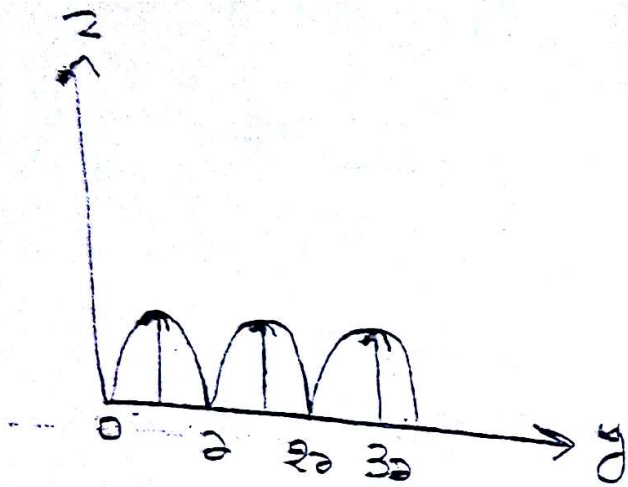
description ellipse

||

* 1 onde longitudinale: $\Rightarrow \vec{k}$

$$\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) = 0 \Rightarrow y = am \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) = \cos m\pi$$

$$m \in \mathbb{N}$$

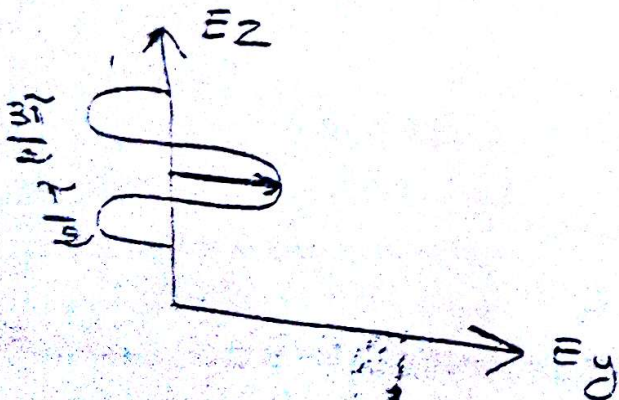
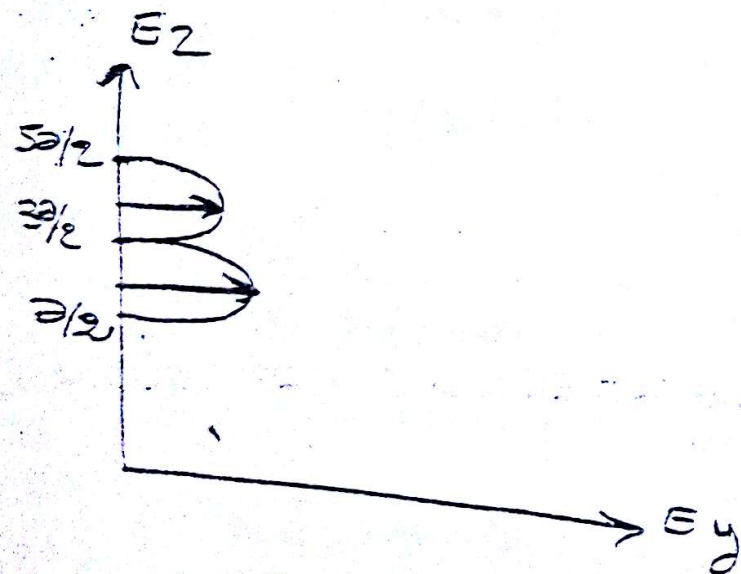


* 1 onde transversale: $\perp \vec{k} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi y}{a} = \left(2m+1\right)\frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{(2m+1)a}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) = \sin\left[\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi\right]$$



2°/ Relation de dispersion:

$$\frac{1}{v} \nabla \cdot \vec{E} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_y = 0$$

$$\Delta E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp^{j(\omega t - kz)}$$

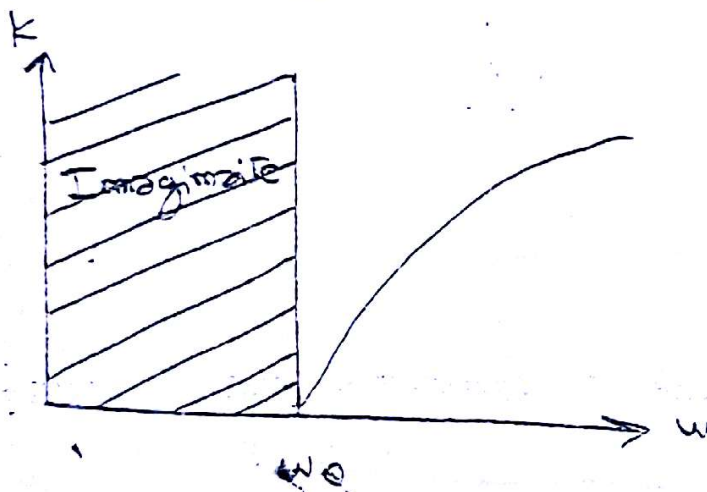
$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} = j\omega \epsilon_y \Rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} = -\omega^2 \epsilon_y$$

$$\left[\frac{-\pi^2}{\partial^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \epsilon_y = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{\partial^2} = \frac{1}{c^2} \left[\omega^2 - \frac{c^2 \pi^2}{\partial^2} \right]$$

Poson: $\omega_0^2 = \frac{c^2 \pi^2}{\partial^2}$

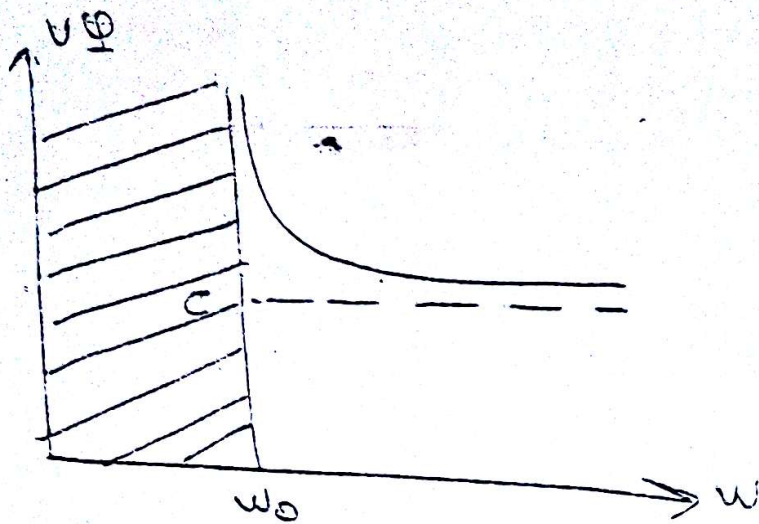
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{c^2} [\omega^2 - \omega_0^2] \Leftrightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$



Pour la vitesse:

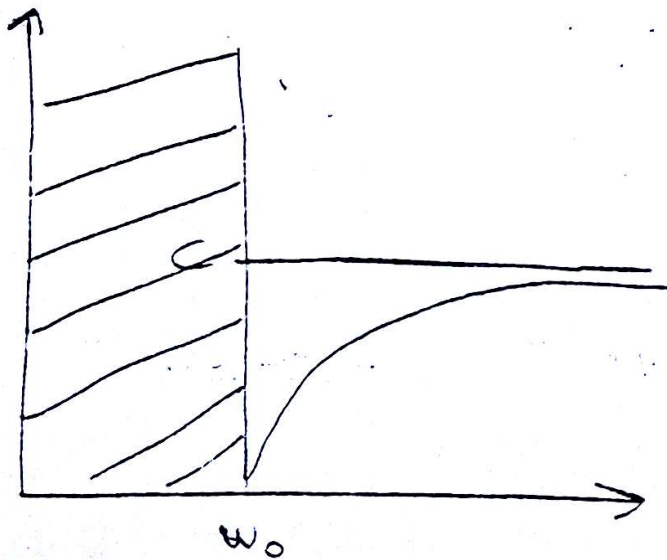
$$v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

∞



$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

$$2k dk = \frac{2\omega}{c^2} d\omega \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\omega} k = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$



$\frac{d\omega}{dk}$